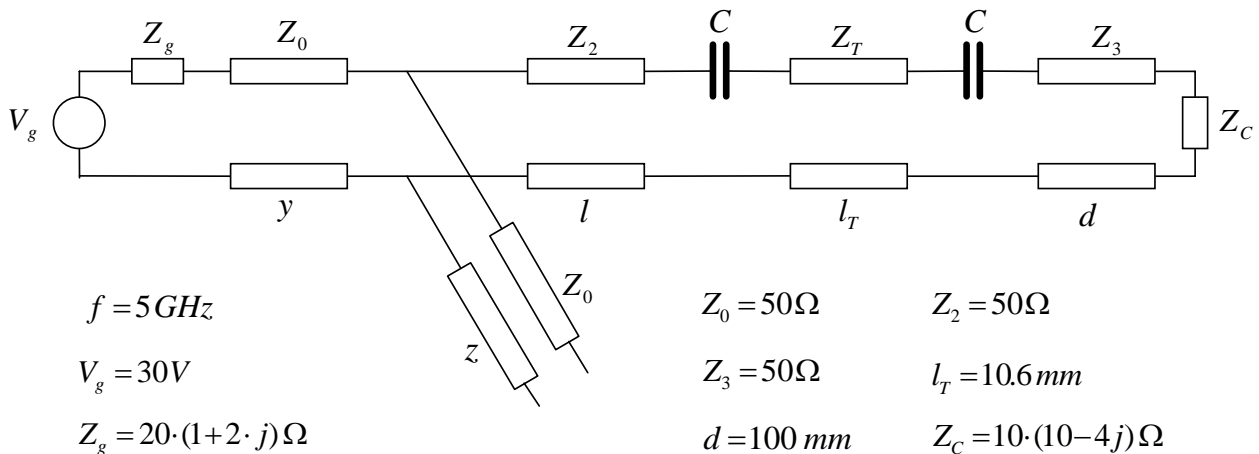


# ESERCIZIO 7 - TUTORATO PROPAGAZIONE A.A. 06/07

11-12/04/2007

Esercizio 1 (13 punti / 18)

Prova scritta di propagazione (1° parte) - 15 04 2003



Nel circuito in figura, alimentato alla frequenza di  $5 \text{ GHz}$ , le linee sono tutte riempite con dielettrico costante  $\epsilon_r = 2$ .

Si determinino il valore di  $C$  e di  $Z_T$  e, indipendentemente, il valore minimo di  $z$  ed il corrispondente valore minimo di  $y$ , in modo che il carico assorba tutta la potenza disponibile dal generatore, indipendentemente dalla lunghezza del tratto di linea centrale di impedenza  $Z_2$ .

Si calcoli poi tale potenza massima.

## SOLUZIONI

$$C = 0.15 \text{ nF}$$

$$Z_T = 202.13 \Omega$$

$$z = 6.7986 \text{ mm}$$

$$y = 19.3745 \text{ mm}$$

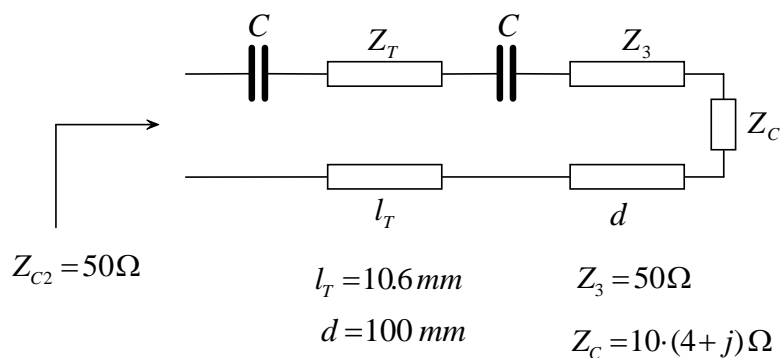
$$P_D = 5.625 \text{ W}$$

### A) Calcolo di $C$ e $Z_T$ .

La richiesta che il carico assorba la massima potenza disponibile dal generatore indipendentemente dalla lunghezza del tratto di linea centrale di impedenza  $Z_2$ , significa che a valle di tale impedenza il suo carico deve essere ancora paria a  $Z_2$  ovvero a  $50 \Omega$ .

Ricadiamo in questo modo nel caso in cui una linea di impedenza caratteristica  $Z_0$  (generico) risulta chiusa su un carico  $Z_C = Z_0$  (generico); in tal caso l'impedenza di ingresso della linea è ancora pari a  $Z_0$  qualunque sia la sua lunghezza  $L$  (vedi appunti teoria), in quanto trattasi di linea adattata.

Di conseguenza  $C$  e  $Z_T$  possono essere calcolati richiedendo che a valle della linea  $Z_2$  l'impedenza valga  $Z_2 = 50 \Omega$ , cioè:



Conviene innanzitutto ridurre la linea  $Z_3$  chiusa sul suo carico  $Z_C$  (noti) ad un'unica impedenza equivalente di ingresso alla linea  $Z_{IN3}$  con la solita formula del trasporto di impedenza:

$$Z_{IN3} = Z_3 \cdot \frac{Z_C + j \cdot Z_3 \tan(\beta \cdot d)}{Z_3 + j \cdot Z_C \tan(\beta \cdot d)}$$

Serve determinare la lunghezza elettrica della linea per il calcolo della tangente, ovvero lunghezza d'onda e costante di propagazione della linea.

Nel vuoto abbiamo che

$$C_0 = 3 \cdot 10^8 \left[ \frac{m}{s} \right] \quad \lambda_0 = \frac{C_0}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^9} = 60 [\text{mm}] \quad \beta_0 = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_0} = 104.72 [m^{-1}]$$

ma essendo tutte le linee riempite con un dielettrico di costante dielettrica  $\varepsilon = 2$  allora si ha

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon}} = 42.4264 [\text{mm}] \quad \text{e} \quad \beta = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = 148.0961 [m^{-1}]$$

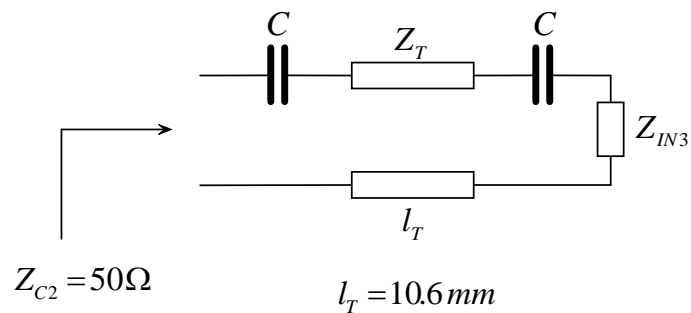
Con quei valori

$$\beta \cdot d = 148.0961 \cdot [m^{-1}] \cdot 100 \cdot 10^{-3} \cdot [m] = 14.80961 \text{ rad} \quad T = \tan(\beta \cdot d) = -1.256$$

Infine l'impedenza di ingresso alla della linea  $Z_3$  vale

$$\begin{aligned} Z_{IN3} &= Z_3 \cdot \frac{Z_C + j \cdot Z_3 \tan(\beta \cdot d)}{Z_3 + j \cdot Z_C \tan(\beta \cdot d)} = \\ &= Z_3 \cdot \frac{Z_3 \cdot R_C \cdot (1 + T^2) + j \cdot [Z_3 \cdot X_C \cdot (1 - T^2) + (Z_3^2 - |Z_C|^2) \cdot T]}{|Z_C|^2 \cdot T^2 - 2 \cdot Z_3 \cdot X_C \cdot T + Z_3^2} = \\ &= 40.85 + j \cdot 39.89 \quad \Omega \end{aligned}$$

Ci siamo ricondotti a



L'impedenza  $Z_{IN3}$  viene ora a trovarsi in serie con la reattanza capacitiva  $-j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = -j \cdot X_C$ , e questa serie si può poi trasportare oltre la linea  $Z_T$  conducendo ad una nuova impedenza di ingresso  $Z_{INT}$ .

Prima di applicare la formula del trasporto di impedenza ci occorre al solito la lunghezza elettrica della linea  $Z_T$ :

$$\beta \cdot d = 148.0961 \cdot [m^{-1}] \cdot 10.6 \cdot 10^{-3} \cdot [m] = 1.5698 \text{ rad} \rightarrow (89.94^\circ \cong 90^\circ) \quad \tan(\beta \cdot d) = 1.02 \cdot 10^3$$

I calcoli sopra mostrano che la linea  $Z_T$  può essere considerata con buona approssimazione una linea  $\lambda/4$ , per cui la sua impedenza di ingresso vale

$$Z_{INT} = \frac{Z_T^2}{\text{Re}_{IN3} + j \cdot X_{IN3} - j \cdot X_C}$$

dove si è posto

$$Z_{IN3} = \text{Re}_{IN3} + j \cdot \text{Im}_{IN3} = 40.85 + j \cdot 39.89 \text{ } \Omega$$

impedenza di ingresso alla linea  $Z_3$  che in serie alla reattanza capacitiva è diventato il carico della linea  $Z_T$ .

Questa nuova impedenza di ingresso  $Z_{INT}$  è a sua volta in serie con la seconda reattanza capacitiva, e tale serie deve essere reale di valore pari a  $Z_2 = 50 \text{ } \Omega$ ; cioè:

$$Z_2 = \frac{Z_T^2}{\text{Re}_{IN3} + j \cdot X_{IN3} - j \cdot X_C} - j \cdot X_C$$

La relazione sopra è una equazione complessa nelle due incognite  $X_C$  e  $Z_T$ , che può scriversi come un sistema di due equazioni reali in due incognite reali, dop averne fatto il minimo comune multiplo:

$$Z_2 \cdot (\text{Re}_{IN3} + j \cdot X_{IN3} - j \cdot X_C) = Z_T^2 - j \cdot X_C \cdot (\text{Re}_{IN3} + j \cdot X_{IN3} - j \cdot X_C)$$

$$\begin{cases} Z_2 \cdot \text{Re}_{IN3} = +X_C \cdot (X_{IN3} - X_C) \\ Z_2 \cdot (X_{IN3} - X_C) = Z_T^2 - X_C \cdot \text{Re}_{IN3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_C = \frac{Z_2 \cdot \text{Im}_{IN3}}{Z_2 - \text{Re}_{IN3}} \\ Z_T = \sqrt{Z_2 \cdot \text{Re}_{IN3} - X_C \cdot (X_{IN3} - X_C)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_C = 217,965 \ \Omega \\ Z_T = 202,131 \ \Omega \end{cases}$$

Resta da determinare il valore della capacità  $C$  :

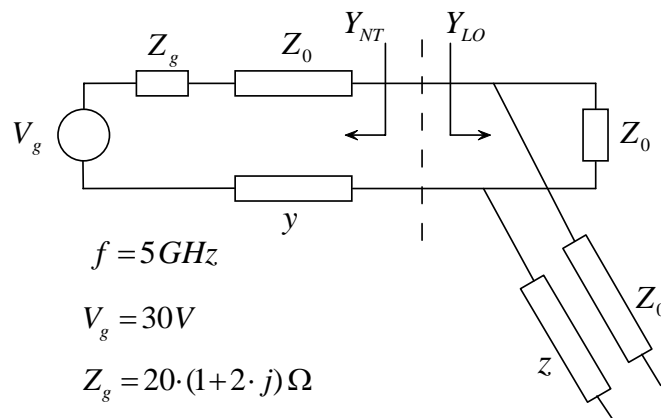
$$C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} = 0.15 \text{ nF} \quad \text{con} \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 31.42 \cdot 10^9 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$$

## B) Calcolo di $z$ e $y$ .

La scelta di  $X_C$  e  $Z_T$  fatta al punto precedente a permesso di avere come carico alla linea  $Z_2$  un'impedenza di valore pari all'impedenza caratteristica della linea stessa.

Questo significa che l'impedenza di ingresso della linea  $Z_2$ , qualsiasi sia la sua lunghezza vale sempre  $Z_2 = Z_0 = 50 \Omega$ .

Il circuito si semplifica allora come segue:



Le incognite  $z$  e  $y$  possono ora essere calcolate sfruttando la teoria dell'adattamento coniugato a singolo Stub.

Essendo uno stub in parallelo conviene lavorare in termini di ammettenze. La sezione ideale per l'adattamento è quella tratteggiata. Conviene calcolare a sinistra di questa sezione il generatore equivalente di Norton (per l'adattamento basta solo l'ammettenza interna del generatore equivalente di Norton).

$$Y_{NT} = Y_0 \cdot \frac{Y_g + j \cdot Y_0 \cdot T_y}{Y_0 + j \cdot Y_g \cdot T_y}$$

dove

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{50\Omega} = 20 \text{ mS}$$

$$Y_g = \frac{1}{Z_g} = \frac{1}{20 \cdot (1 + j \cdot 2)\Omega} = \frac{1}{20} \cdot \frac{(1 - j \cdot 2)}{1 + 4} \text{ S} = 10 \cdot (1 - j \cdot 2) \text{ mS}$$

$$T_y = \tan(\beta \cdot y)$$

Mentre a destra abbiamo un carico che è dato dal parallelo della reattanza dello stub con una ammettenza  $Y_0 = 1/Z_0$ :

$$Y_{LO} = Y_0 + j \cdot Y_0 \cdot \tan(\beta \cdot z) = Y_0 + j \cdot Y_0 \cdot T_z$$

A questo punto per il calcolo di  $z$  e  $y$ , bisogna imporre la condizione di adattamento coniugato alla sezione tratteggiata cioè:

$$[G_{NT}(y) + j \cdot B_{NT}(y)]^* = G_{LO} + j \cdot B_{LO}(z)$$

equazione complessa nelle due incognite  $z$  e  $y$  reali; separando parte reale e immaginaria si ottengono due equazioni reali in due incognite reali:

$$\begin{aligned} G_{NT}(y) &= G_{LO} \\ -B_{NT}(y) &= B_{LO}(z) \end{aligned}$$

Serve sviluppare allora l'ammettenza interna del generatore di norton in parte reale ed immaginaria:

$$\begin{aligned}
 Y_{NT}(y) &= G_{NT}(y) + j \cdot B_{NT}(y) = \\
 &= Y_0 \cdot \frac{Y_g + j \cdot Y_0 \cdot T_y}{Y_0 + j \cdot Y_g \cdot T_y} = \\
 &= Y_0 \cdot \frac{(G_g + j \cdot B_g) + j \cdot Y_0 \cdot T_y}{Y_0 + j \cdot (G_g + j \cdot B_g) \cdot T_y} = \\
 &= Y_0 \cdot \frac{G_g \cdot Y_0 \cdot T_y^2 + G_g \cdot Y_0 + j \cdot \left[ -B_g \cdot Y_0 \cdot T_y^2 + (Y_0^2 - |Y_g|^2) \cdot T_y + B_g \cdot Y_0 \right]}{|Y_g|^2 \cdot T_y^2 - 2 \cdot Y_0 \cdot B_g \cdot T_y + Y_0^2}
 \end{aligned}$$

Separando parte reale e immaginaria si ha:

$$\begin{aligned}
 G_{NT}(y) &= Y_0 \cdot \frac{G_g \cdot Y_0 \cdot T_y^2 + G_g \cdot Y_0}{|Y_g|^2 \cdot T_y^2 - 2 \cdot Y_0 \cdot B_g \cdot T_y + Y_0^2} \\
 B_{NT}(y) &= Y_0 \cdot \frac{-B_g \cdot Y_0 \cdot T_y^2 + (Y_0^2 - |Y_g|^2) \cdot T_y + B_g \cdot Y_0}{|Y_g|^2 \cdot T_y^2 - 2 \cdot Y_0 \cdot B_g \cdot T_y + Y_0^2}
 \end{aligned}$$

Imponendo poi la condizione di adattamento coniugato:

$$\begin{aligned}
 Y_0 &= Y_0 \cdot \frac{G_g \cdot Y_0 \cdot T_y^2 + G_g \cdot Y_0}{|Y_g|^2 \cdot T_y^2 - 2 \cdot Y_0 \cdot B_g \cdot T_y + Y_0^2} \\
 Y_0 \cdot T_z &= Y_0 \cdot \frac{B_g \cdot Y_0 \cdot T_y^2 + (|Y_g|^2 - Y_0^2) \cdot T_y - B_g \cdot Y_0}{|Y_g|^2 \cdot T_y^2 - 2 \cdot Y_0 \cdot B_g \cdot T_y + Y_0^2}
 \end{aligned}$$

Dalla prima si ricava  $T_y$ , e una volta noto quest'ultimo si può ricavare  $T_z$  dalla seconda:

$$\begin{aligned} |Y_g|^2 \cdot T_y^2 - 2 \cdot Y_0 \cdot B_g \cdot T_y + Y_0^2 &= G_g \cdot Y_0 \cdot T_y^2 + G_g \cdot Y_0 \\ T_z &= \frac{B_g \cdot Y_0 \cdot T_y^2 + (|Y_g|^2 - Y_0^2) \cdot T_y - B_g \cdot Y_0}{|Y_g|^2 \cdot T_y^2 - 2 \cdot Y_0 \cdot B_g \cdot T_y + Y_0^2} \end{aligned}$$

Sviluppando la prima:

$$(|Y_g|^2 - G_g \cdot Y_0) \cdot T_y^2 - 2 \cdot Y_0 \cdot B_g \cdot T_y + (Y_0^2 - G_g \cdot Y_0) = 0$$

Equazione di secondo grado in  $T_y$ , le cui soluzioni sono

$$\begin{aligned} T_y &= \frac{2 \cdot Y_0 \cdot B_g \pm \sqrt{(2 \cdot Y_0 \cdot B_g)^2 - 4 \cdot (|Y_g|^2 - G_g \cdot Y_0) \cdot (Y_0^2 - G_g \cdot Y_0)}}{2 \cdot (|Y_g|^2 - G_g \cdot Y_0)} = \\ &= \begin{cases} T_{py} = -0.279241 \\ T_{my} = -2.387426 \end{cases} \end{aligned}$$

I corrispondenti valori di  $T_z$  valgono:

$$T_z = \begin{cases} T_{pz} = T_z|_{T_y=T_{py}} = 1.581139 \\ T_{mz} = T_z|_{T_y=T_{my}} = -1.581139 \end{cases}$$

Trovate le possibili soluzioni per le tangenti  $T_y = \tan(\beta \cdot y)$  e  $T_z = \tan(\beta \cdot z)$ , si possono ora ricavare le lunghezze incognite  $z$  e  $y$ ; infatti:

$$z = \frac{\arctan(T_z) + n \cdot \pi}{\beta} \quad y = \frac{\arctan(T_y) + n \cdot \pi}{\beta}$$

La prima soluzione fornisce  $z$  e  $y$  minimi di valore pari a

$$z = \frac{\arctan(1.581139)}{148.0961} = 6.7986 \text{ mm} \quad y = \frac{\arctan(-0.279241) + \pi}{148.0961} = 19.3745 \text{ mm}$$

La seconda soluzione fornisce, viceversa,  $z$  e  $y$  minimi di valore pari a

$$z = \frac{\arctan(-1.581139) + \pi}{148.0961} = 14.4145 \text{ mm} \quad y = \frac{\arctan(-2.387426) + \pi}{148.0961} = 13.2882 \text{ mm}$$

Poiché il testo chiede di determinare il minimo valore di  $z$  e il corrispondente valore di  $y$ , significa che la soluzione cercata è la prima:

$$z = 6.7986 \text{ mm} \quad y = 19.3745 \text{ mm}$$

Per quanto riguarda il calcolo della potenza massima sul carico, essendo riusciti a imporre la condizione di adattamento coniugato e non essendoci altri elementi dissipativi tra il generatore ed il carico non è assolutamente necessario, come già accennato, calcolarsi il generatore equivalente di Norton alla sezione dell'adattamento e calcolare poi la potenza risolvendo il circuito secondo i principi di Kirchoff.

In condizioni di adattamento coniugato la potenza massima dissipata è semplicemente tutta la potenza disponibile dal generatore:

$$P_D = \frac{1}{8} \frac{|V_g|^2}{R_g} = \frac{1}{8} \frac{900}{20} = 5.625 \text{ W}$$